

## **Esqueletización digital sobre la geometría de dos complejos celulares**

Alfredo Trejo, Leonardo Herrera, Roberto Castro y Miguel Martínez

A. Trejo, L. Herrera, R. Castro y M. Martínez

Tecnológico de Estudios Superiores del Oriente del Estado de México. Paraje San Isidro s/n, colonia Barrio de Tecamachalco, La paz, Estado de México, cp. 56400.

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del IPN. Unidad profesional “Adolfo López Mateos”. Edificio número 5, #er. Piso, oficinas 7 y 8. Col. Linda Vista, cp. 07738.

aalfredot@yahoo.com.mx

M. Ramos., V.Aguilera., (eds.) .Ciencias de la Ingeniería y Tecnología, Handbook -©ECORFAN- Valle de Santiago, Guanajuato, 2014.

## Abstract

This work presents studies within two areas of mathematics, which are related to Digital Image Processing, in particular, with skeletonization: Digital Topology and Digital Geometry. A thinning algorithm proposed in 2001 by Kovalevsky, for binary digital two-dimensional images modelled by cell complexes, is applied and studied using both the hexagonal and the quadratic cell complexes. For the hexagonal and quadratic cell complex, Kovalevsky's algorithm is developed and implemented as a pattern matching method in this work. The skeletons obtained in various experiments are analyzed with respect to topological and geometrical properties and they are compared with Blum's skeleton.

## 18 Introducción

Una imagen digital, matemáticamente es modelada como una función cuyo dominio de definición es un subconjunto  $D$  acotado discreto de  $\mathbb{R}^n$ , y su dominio de valores es un subconjunto acotado de  $\mathbb{Z}$ . Los elementos del conjunto  $D$  son llamados píxeles. Dentro del presente trabajo consideraremos solamente imágenes digitales de dimensión dos, es decir,  $f: D \rightarrow \{0, 1\}$ , donde  $D$  es un subconjunto acotado discreto de  $\mathbb{R}^2$ , y la función  $f$  asigna a todo elemento del objeto el valor 1, y a todo elemento de la imagen que no es elemento del objeto, el valor 0. El conjunto de los elementos de la imagen cuyo valor es 0, es llamado fondo de la imagen.

La necesidad de la digitalización se centra en el Procesamiento Digital de Imágenes (PDI), que fue originalmente un área de la Ingeniería, pero esta hoy profundamente relacionada con muchas áreas de las matemáticas en especial con dos: la Geometría Digital y Topología Digital. El objetivo del PDI es contribuir al análisis y al entendimiento de patrones presentes en imágenes digitales, por eso, el PDI comprende todo los métodos, tanto teóricos como técnicos, para procesar imágenes digitales, desde su adquisición, incluyendo su tratamiento con el objetivo de algún mejoramiento, y técnicas para encontrar objetos de interés dentro de las imágenes.

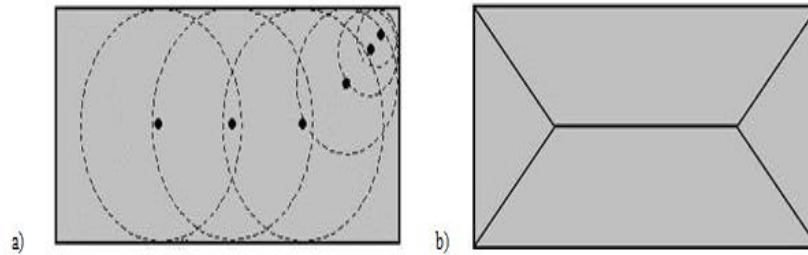
Este trabajo estudia un método particular e interesante del PDI, llamado adelgazamiento, el cual es muy importante en el análisis, clasificación y reconocimiento de objetos, como lo son partes de animales, plantas o de microorganismos; pero también puede ser el “espacio libre” de un robot móvil. El adelgazamiento es uno de varios métodos para determinar al subconjunto definido como esqueleto e intuitivamente, el esqueleto es una versión “idealmente delgada” del objeto, la cual preserva propiedades topológicas del objeto como su conectividad (conexidad), o su número de hoyos, pero también preserva propiedades geométricas como la longitud de brazos.

En 2001, Kovalevsky propuso un algoritmo de adelgazamiento (Kovalevsky V. A., 2001), para imágenes digitales binarias modeladas por complejos celulares. Cabe mencionar que la propuesta del algoritmo es muy general y breve, sin mención de detalles de cómo realizar los pasos centrales del algoritmo, para cierto complejo celular específico. El presente trabajo tiene por objetivo desarrollar y programar el algoritmo de adelgazamiento de Kovalevsky para el complejo celular cuadrático y hexagonal, y así hacer una comparación entre los esqueletos logrados por la implementación del algoritmo y su esqueleto de Blum correspondient.

### 18.1 Desarrollo

En  $\mathbb{R}^2$  con la métrica euclidiana, si  $p$  es punto del esqueleto de  $\mathcal{R}$ , entonces  $p$  es el centro de una circunferencia de máximo radio que cabe dentro de  $\mathcal{R}$ . Esto significa que  $p$  es el centro de un disco contenido en  $\mathcal{R}$ , y  $p$  no pertenece a ningún disco más grande contenido en  $\mathcal{R}$ .

**Figura 18** En la figura (a) se tienen algunas de las circunferencias de máximo radio contenidas en el objeto. En (b) se muestra el conjunto de todos los centros de las circunferencias como en (a), dicho conjunto es el esqueleto de Blum del rectángulo dado dentro del espacio Euclidiano



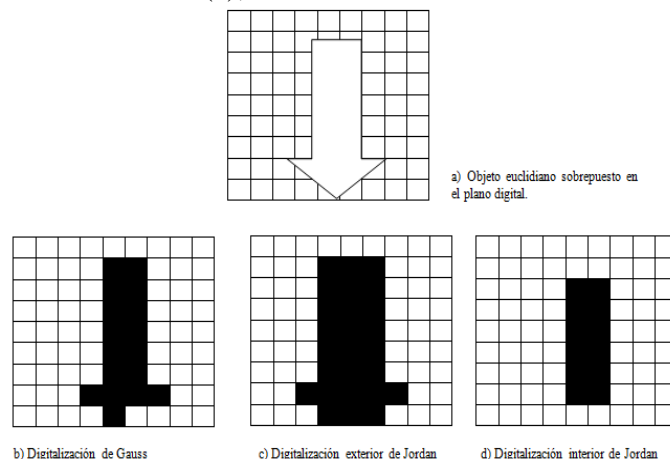
Cabe notar que para obtener el esqueleto de Blum, para un objeto euclidiano, no se conoce construcción geométrica alguna (con regla y compás) o algoritmo alguno. Solamente se tiene la definición citada en (Trejo, 2007, pág. 56) la cual nos proporciona un método para construir al esqueleto, y se sabe que el esqueleto está contenido en el conjunto de centros de circunferencias maximales que caben dentro del objeto.

La definición de esqueleto de Blum, no es aplicable para objetos digitalizados sobre el plano digital  $\mathbb{Z}^2$ . La digitalización sobre  $\mathbb{Z}^2$  de un subconjunto del plano euclidiano, que también podemos llamar objeto, es la captura de éste mediante algún mapeo, cuyo resultado es un subconjunto del plano digital, llamado objeto digital.

En (Zempoalteca, 2004) se tienen establecidos dos mapeos de digitalización, desarrollados por C.F. Gauss y C. Jordan:

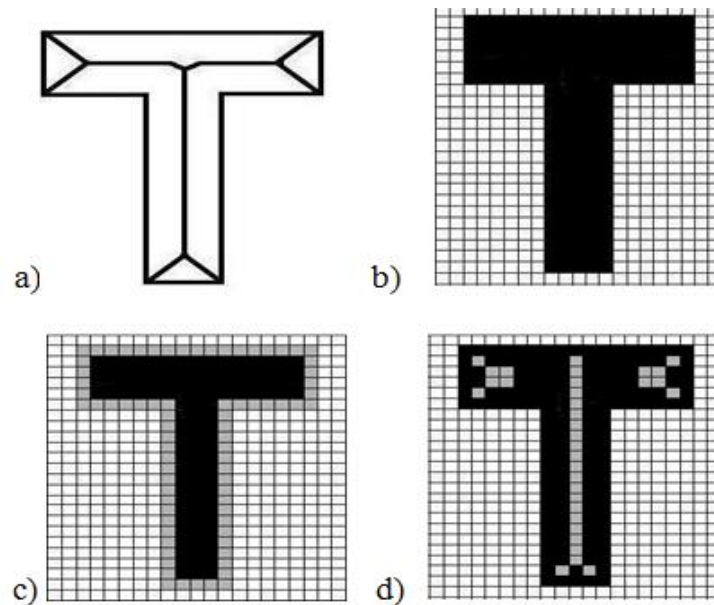
- 1) Para un objeto  $M \subseteq \mathbb{R}^2$ , la digitalización de Gauss  $G(M) = M \cap \mathbb{Z}^2$ , es decir, la digitalización de Gauss  $G(M)$  es la unión de los píxeles cuyo centro está contenido en  $M$ .
- 2) Sea  $M$  un subconjunto del plano euclidiano. La digitalización interior de Jordan  $J_h^-(M)$ , es la unión de todos los píxeles que estén completamente contenidos en  $M$ ; y la unión de todos los píxeles los cuales intersecan a  $M$ ,  $J_h^+(M)$ , es llamada digitalización exterior de Jordan.

**Figura 18.1** En esta figura se ejemplifica los distintos métodos de que son aplicables sobre el plano digital, como lo es la digitalización de Gauss (b), la digitalización exterior de Jordan (c) y la digitalización interior de Jordan (d), todos orientados a una mismo objeto euclidiano(a)



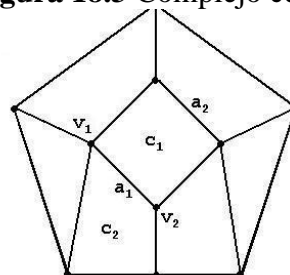
Experimentado el proceso de digitalización de Gauss e implementando la definición del esqueleto de Blum al plano digital  $\mathbb{Z}^2$  mediante la relación 4-vecino o 8-vecino de sus elementos, se comprueba que el esqueleto de Blum no identifica al objeto digital inicial satisfactoriamente, pues el esqueleto debe permitirnos determinar propiedades topológicas y geométricas del objeto inicial, como la conectividad y forma, el experimento mostrado en la figura 5, da muestra de ello.

**Figura 18.2** En a) se muestra el esqueleto de Blum del objeto del plano euclidiano. En b) se tiene la digitalización del objeto mediante la digitalización de Gauss. En c) se identifica el contorno del objeto digitalizado, y d) se tiene el esqueleto de Blum para el objeto digitalizado



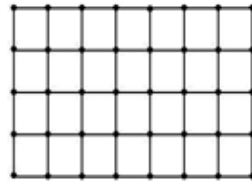
Los complejos celulares abstractos son conocidos en la topología combinatoria y en la geometría de poliedros. El uso de este modelo para describir la geometría y topología de objetos digitales fue tratado por primera vez por Kovalevsky en los años ochenta (Kovalevsky V. , 2001). Para comprender la estructura de un complejo celular analicemos las figuras 6. Esta consiste de elementos de diferentes dimensiones sobre el plano euclidiano: caras (sin cantos), cantos (sin puntos finales) y vértices. Además tenemos que un canto  $a_1$  acota o bien frontera a las caras las regiones  $c_1$  y  $c_2$ ; a su vez los vértices  $v_1$  y  $v_2$  acotan o fronterizan al canto  $a_1$  y a las caras de  $c_1$  y  $c_2$ . El conjunto formado por todos estos elementos se conoce como complejo celular y sus elementos son llamados células. Es importante enfatizar que un elemento de dimensión 2 es el interior de un polígono convexo, un elemento de dimensión 1 es un segmento de línea, el cual es considerado sin sus dos puntos finales, y un elemento de dimensión 0 es un solo punto.

**Figura 18.3** Complejo celular

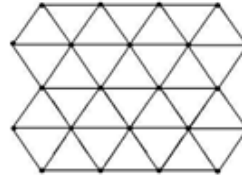


Al descomponer el plano euclidiano en polígonos convexos regulares (todos sus ángulos y lados iguales), resulta que los únicos polígonos convexos regulares posibles son: el cuadrado, triángulo y hexágono (Trejo, 2007, págs. 45-46). Así se tienen tres complejos distintos a considerar: complejo celular cuadrático, complejo celular triangular y el complejo celular hexagonal.

**Figura 18.4** Complejos celulares del espacio euclidiano



a) Complejo celular cuadrático.



b) Complejo celular triangular.



c) Complejo celular hexagonal.













Todos los experimentos, desde la digitalización de objetos, hasta el estudio de los esqueletos de Kovalevsky, serán realizados exclusivamente en el complejo celular cuadrático, y el complejo celular hexagonal, el complejo celular triangular es tratado en (Morales, 2007).

Los procesos de digitalización experimentados como mapeamiento de subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$ , sobre subcomplejos celulares, dependen de la interpretación geométrica de píxel, misma que se describe como sigue:

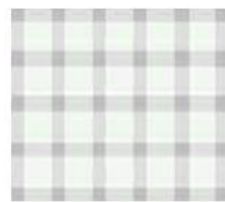
Para los  $k$ -grafos vecinos, se considera un píxel como un objeto cuadrado unitario cuyo centro pertenece al plano digital  $\mathbb{Z}^2$ .

Generalizando esta idea hacia un complejo celular, se tiene que un píxel, es determinado como una célula, tal que, su dimensión es máxima (ver tabla I). Por otro lado, para garantizar la conexidad del objeto euclidiano en los mapeos digitales de Gauss o Jordan sobre el subcomplejo celular, el píxel debe ser complementado por todas las células de dimensión menor.

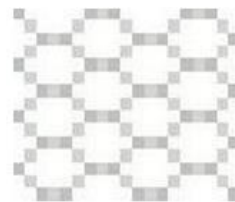
**Tabla 18** Visualización de los complejos celulares cuadrático y hexagonal en  $\mathbb{Z}^2$ 

Elemento del complejo	Representación en el plano euclidiano	Representación en $\mathbb{Z}^2$
<b>complejo cuadrático.</b>		
Célula dimensión 0.	Punto 	Píxel 
Célula dimensión 1.	Canto 	Conjunto de dos píxeles 
Célula dimensión 2.	Cuadrado 	Conjunto de cuatro píxeles 
<b>complejo hexagonal.</b>		
Célula dimensión 0.	Punto 	Píxel 
Célula dimensión 1.	Canto 	Píxel 
Célula dimensión 2.	Cuadrado 	Conjunto de cuatro píxeles 

De acuerdo a lo establecido en la tabla I, presentamos la visualización de una región acotada del complejo cuadrático y hexagonal.

**Figura 18.5** Complejos celulares

a) Complejo cuadrático



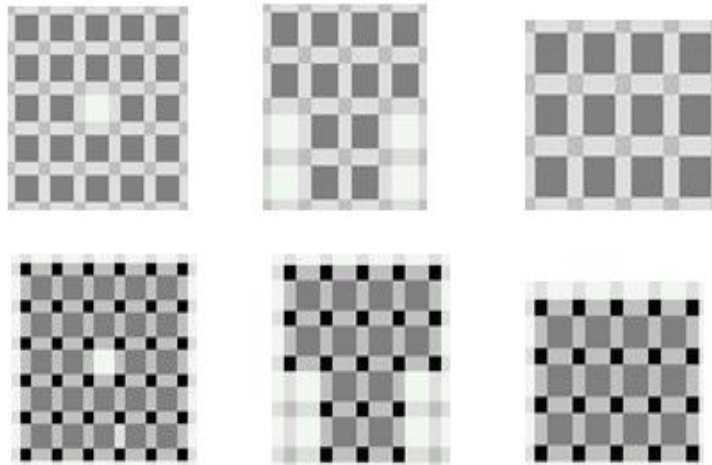
b) Complejo hexagonal

La figura 9 y 10, muestran los resultados obtenidos de acuerdo al desarrollo e implementación del algoritmo de digitalización sobre los complejos celulares. Primeramente se muestra el objeto euclidiano, y posteriormente se presenta la digitalización del mismo objeto como subcomplejo celular.

**Figura 18.6** Digitalización sobre el complejo cuadrático

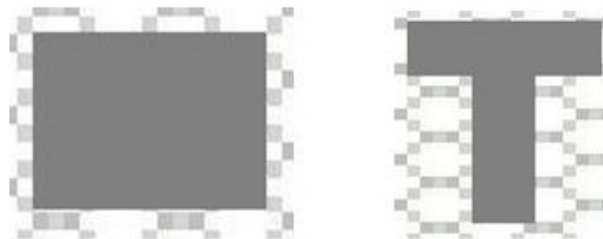


a) Serie de objetos euclidianos.

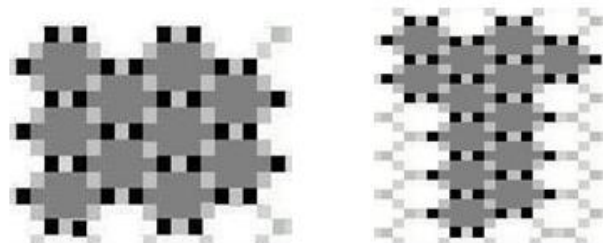


b) Serie de objetos digitales (digitalización de Gauss, exterior de Jordan e interior de Jordan, respectivamente) sobre el complejo celular cuadrático.

**Figura 18.7** Digitalización sobre el complejo hexagonal



a) Objetos euclidianos



b) Serie de objetos digitales (digitalización de Gauss y exterior de Jordan, respectivamente) sobre el complejo celular hexagonal.

Históricamente, Listing ya manejaba en 1862 el término de esqueleto lineal para describir al subconjunto resultante de deformaciones continuas de un subconjunto conexo, de un espacio euclidiano sin cambio en la conectividad del conjunto original, hasta obtener un conjunto de puntos y líneas (Klette & Rosenfeld, *Digital Geometry: Geometric Methods for Digital Picture Analysis*, 2004, pág. 215). Muchos algoritmos de análisis de imágenes se basan en este proceso de deformaciones, llamado adelgazamiento.

En la literatura el término adelgazamiento no tiene una única interpretación, aunque describe operaciones de reducción que preserva la conectividad al ser aplicadas sobre objetos digitales, involucrando iteraciones para transformar elementos de frontera en elementos de fondo.

Un algoritmo de adelgazamiento debe satisfacer las siguientes condiciones como ha sido establecido en varias publicaciones, vea por ejemplo (Klette, *Skeletons in Digital Geometry: Geometric Methods for Digital Picture Analysis*, 2004):

- El objeto resultante del objeto original debe ser delgado.
- El subconjunto debe aproximarse al eje medio.
- Los puntos finales deben preservarse. Los puntos finales son aquellos puntos que son extremos de líneas o curvas digitales, al no preservarlos en un proceso de adelgazamiento, las líneas o curvas digitales degeneran en puntos.
- La conectividad tanto del objeto como también del fondo debe ser preservada. Los píxeles de la frontera o frontera abierta de un objeto digital cuya eliminación preserva la conectividad del objeto y su fondo, se conoce con el nombre de píxeles simple. Hay diferentes formas de ubicar estos píxeles en el objeto digital, entre las cuales se encuentran: plantillas y expresiones booleanas.
- El algoritmo debe ser robusto contra ruido.

Se habla de Frontera cuando el contorno del objeto digitalizado sobre algún complejo celular este estructurado de células de dimensión cero y uno (puntos y segmentos). Este conjunto se denota como  $Fr$ . y se habla de Frontera abierta cuando el contorno del objeto digitalizado sobre algún complejo celular este estructurado de células de dimensión cero y dos (puntos y cuadrados o hexágonos). Este conjunto se denota como  $Of$ .

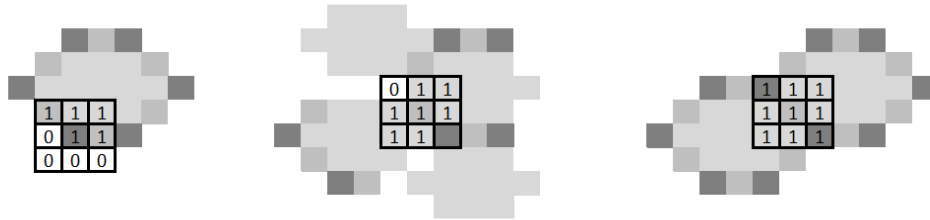
Para la eliminación de píxeles simples de la frontera o de la frontera abierta, fueron utilizadas plantillas, considerando a una plantilla como un arreglo de píxeles alrededor de un píxel de interés (vecindad de píxeles) que permite realizar operaciones locales mediante la comparación de valores presentes en las plantillas, con los valores del objeto digital. Estas operaciones buscan distintos fines, entre las cuales está la preservación de la conectividad del objeto digital. Esta dinámica fue implementada correspondientemente para la eliminación de puntos finales.

Las plantillas implementadas en el desarrollo de este trabajo para el complejo hexagonal son las establecidas en (Trejo, 2007, págs. 68-73) y para el complejo cuadrático ver (Zempoalteca, 2004, págs. 55-57).



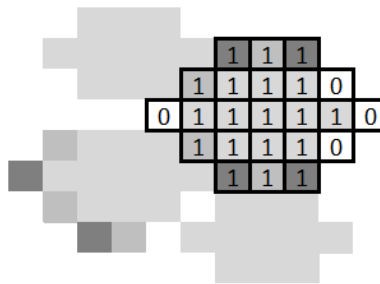
Como un caso particular del uso de estas plantillas, tenemos el análisis de los elementos incidentes con respecto a un punto o un canto del complejo hexagonal, para ello se considera un arreglo de 8 píxeles, alrededor del píxel de interés, como lo muestra la figura 11.

**Figura 18.8** Ejemplos de plantillas que sitúan a un canto o un punto al centro



También podemos mencionar que para analizar la incidencia de elementos sobre una célula de dimensión 2 del complejo hexagonal, tenemos, un arreglo compuesto de 23 píxeles, 11 que lo representan y 12 que representan los puntos y cantos incidentes con él.

**Figura 18.9** Ejemplos de plantillas para hexágonos de la frontera



En base a la información planteada los pasos considerados para el desarrollo del algoritmo de adelgazamiento, para el complejo cuadrático y hexagonal, son los siguientes:

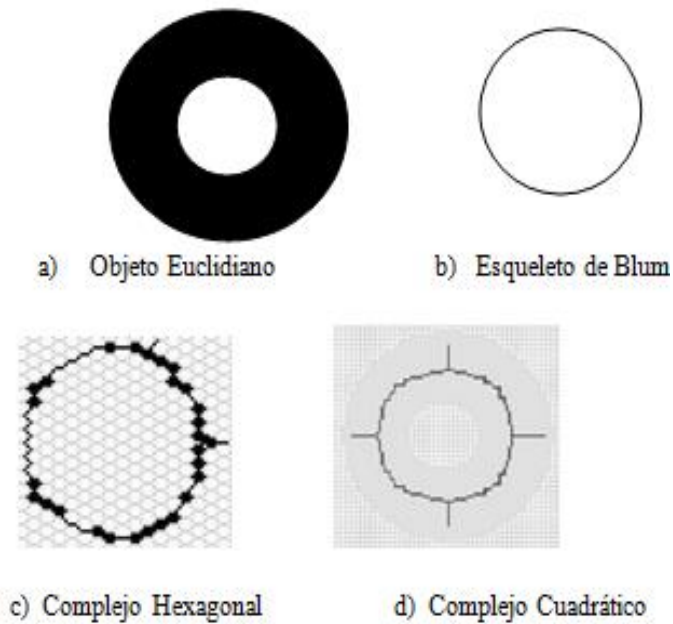
- El objeto de interés del plano euclidiano es digitalizado hacia un subcomplejo (denotándolo como  $T$ ), del complejo celular  $C$ , mediante los métodos de digitalización establecidos.
- Se genera un nuevo subcomplejo,  $T_1 = T \cup \text{Fr}(T)$ , para garantizar que el subcomplejo de entrada al algoritmo sea cerrado.
- Se buscan y marcan a los elementos de  $\text{Fr}(T_1) \cap T_1$  que cumpla con algunas de las configuraciones establecidas de las plantillas.
- Los elementos marcados en el paso 3, son borrados y contados, generando un subcomplejo  $T_2$ .
- Se buscan y marcan a los elementos de  $\text{Of}(T_2) \cap T_2$ , que cumplan con algunas de las configuraciones de las plantillas.
- Los elementos marcados en el paso 5, son borrados y contados, generando un subcomplejo  $S$ .

- El número de elementos contados en los pasos 4 y 6, es sumado. En este momento finaliza una iteración.
- Si la suma del paso anterior es cero, finalizan las iteraciones y se reporta el subconjunto  $S$ , que representa al esqueleto del subcomplejo  $T$ . En caso contrario, se actualiza  $T_1 = S$ , y comienza una nueva iteración comenzando en 3, hasta cumplir la condición del fin del algoritmo.

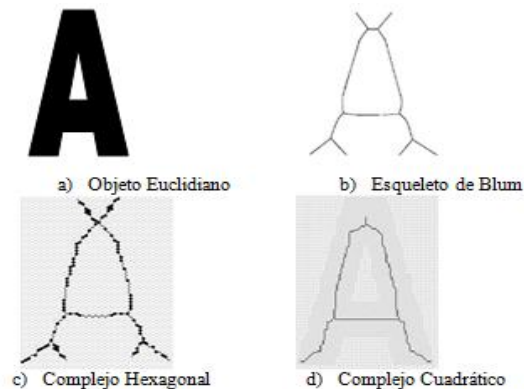
## 18.2 Discusión y análisis de resultados

Los siguientes ejemplos se muestran la comparación del esqueleto de Blum o eje medio, con el resultado de la implementación del algoritmo en los complejos celulares hexagonal y cuadrático.

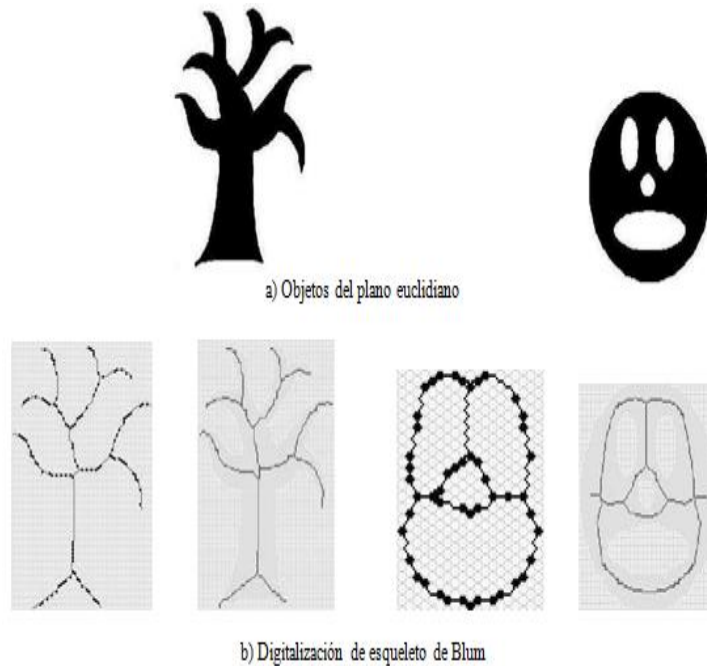
**Figura 18.10** Ejemplo 1, implementación del algoritmo de esqueletización en el complejo hexagonal y cuadrático



**Figura 18.11** Ejemplo 2, implementación del algoritmo de esqueletización en el complejo hexagonal y cuadrático



**Figura 18.12** Ejemplo3, implementación del algoritmo de esqueletización en el complejo hexagonal y cuadrático



Al considerar la muestra presentada como resultado de la implementación del algoritmo de adelgazamiento sobre el complejo hexagonal y cuadrático observamos lo siguiente:

- En el esqueleto digitalizado del objeto euclidiano, en cualquiera de los complejos celulares, se originan ramas que en el objeto original no aparecen (ver figura 13). Esto es debido al ruido generado por el proceso de digitalización.
- El esqueleto digitalizado sobre el complejo cuadrático no logra conservar el número de total de “esquinas” del objeto original. Para el complejo hexagonal este número si se logra mantener, en el esqueleto digitalizado (ver figura 14).
- Los puntos de bifurcaciones son conservados en el esqueleto digitalizado, tanto en el complejo cuadrático como en el complejo hexagonal (ver figura 15).
- El número de hoyos del objeto original es conservado totalmente en el esqueleto digitalizado de ambos complejos celulares (ver figura 16).
- En todos los ejemplos presentados los esqueletos conservan la conexidad del objeto, es decir, el esqueleto no queda dividido en fragmentos.

De las observaciones podemos apreciar que se obtiene una buena aproximación al eje medio (esqueleto de Blum), como se ve en la figura 13 y 14.

### 18.3 Conclusiones

Para objetos digitalizados hacia un complejo celular, solo se puede reportar que la conectividad es una propiedad que garantizadamente es preservada bajo el algoritmo establecido, es decir, este algoritmo, para cada subcomplejo conectado, produce un esqueleto conectado.

Además, este algoritmo no genera hoyos en el objeto, y no conecta partes del objeto que originalmente no estaban conectadas. Los experimentos reportados muestran que con otras propiedades se tiene que tener cuidado para la interpretación, en particular, el número de elementos finales, así como también el número de elementos de bifurcación.

Los esqueletos de Blum de cada uno de nuestras pruebas, al ser comparados con los esqueletos generados como consecuencia de la implementación del algoritmo de adelgazamiento, tienen una gran similitud, la cual es mayor para el complejo hexagonal. Sin embargo aquí tenemos presentes problemas causados por efectos de digitalización.

Finalmente cabe mencionar que la resolución de discretización juega un papel primordial, para que propiedades geométricas y topológicas del objeto euclidiano sean reflejadas en el objeto digitalizado, y además, es conveniente hacer notar que otros efectos negativos de la digitalización son observados cuando el objeto euclidiano es trasladado o rotado. Pues una traslación o rotación genera que el contorno del objeto digitalizado varíe.

### 18.4 Referencias

- Klette, R. (2004). *Skeletons in Digital Geometry: Geometric Methods for Digital Picture Analysis*,. Auckland,: Computer Science Department of the University of Auckland,.
- Klette, R., & Rosenfeld, A. (2004). *Digital Geometry: Geometric Methods for Digital Picture Analysis* . USA: Elsevier.
- Kovalevsky, V. A. (2001). Algorithms and data structure for computer topology, in: Digital and Image Geometry . *Lectures Notes in Computer Science*, 37-38.
- Morales, P. S. (2007). *Topología del adelgazamiento sobre el complejo celular cuadrático y sobre el complejo celular triangular*. México: CINVESTAV.
- Trejo, A. (2007). *Geometría del adelgazamiento sobre el complejo celular cuadrático y sobre el complejo celular hexagonal*. México: CINVESTAV.
- Zempoalteca, M. (2004). *Adelgazamiento en imágenes digitales de dimensión dos, modeladas en el complejos celulares cuadrático*. México: CINVESTAV.